**Возможные варианты решения задач городской олимпиады по геометрии**

**11 класс**

1. Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведённой к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведённой к этой же стороне. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

Решение

Из условия следует, что радиус *rc* вневписанной окружности, касающейся стороны *AB* треугольника *ABC*, равен высоте *hc*, проведённой к этой стороне. Поскольку площадь треугольника  *S* = (*p – c*)*rc* = ½ *chc*,  то  *c* = 2(*p – c*),  то есть  *c* = 2*p*/3.

1. Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?

**Решение**

  Возьмём треугольник со сторонами  *a* = 2,  *b* = 3  и  *c* < 5.  Для отношений высот имеем  *hb* : *ha* = 2 : 3,  2/5 < *hc* : *ha* < ½.  Следовательно,
*hb + hc > ha > hb > hc*  и из высот всегда можно составить треугольник.
  С другой стороны, при  *c* → 5  биссектриса *lc* стремится к нулю, *lc* – к  3 + 3/8·2 = 33/4,  а  *lb* – к  2 + 2/7·3 = 26/7.  Значит, при *c*, близком к 5,  *la – lb > lc*,  и треугольник из биссектрис составить нельзя.

**Ответ**

Неверно.

1. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника    ,   где *l*1, *l*2 – наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, *S* – его площадь.

**Решение**

  Пусть *a > b > c* – стороны треугольника, 2α, 2β, 2γ – соответствующие им углы. Пусть *l* – биссектриса наибольшего угла, тогда
*S* = ½ *bc* sin 2α = ½ (*b + c*)*l* sin α.  Отсюда и из аналогичных соотношений для других биссектрис видно, что *l* – наименьшая биссектриса, то есть  *l = l*2.  Поэтому правое неравенство можно переписать в виде      или      Но  π/6 < α < π/2,  следовательно, левая часть больше 1, а правая меньше 1 по *неравенству Коши*.
  Так как  2γ < π/3,  то      С другой стороны,      (поскольку  *b > c*,  то  *b* cos 2γ > *a*/2).  Поэтому левое неравенство следует из того, что   

1. В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая *l* пересекает стороны угла в точках *A* и *F*, окружность ω в точках *B* и *C*, окружность Ω в точках *D* и *E* (порядок точек на прямой – *A, B, C, D, E, F*). Пусть  *BC = DE*.  Докажите, что  *AB = EF*.

**Решение**

Пусть одна сторона угла касается ω и Ω в точках *X*1, *Y*1, а другая – в точках *X*2, *Y*2; *U, V* – точки пересечения *X*1*X*2 и *Y*1*Y*2 с *AF*. Середина отрезка *CD* лежит на радикальной оси окружностей, то есть на средней линии трапеции *X*1*Y*1*Y*2*X*2, поэтому *BU = EV* и *CU = DV*  (см. рис.). Следовательно, *X*1*U·X*2*U = Y*1*V·Y*2*V*.  Отсюда  *FY*2 : *FX*2 = *Y*2*V* : *X*2*U* = *X*1*U* : *Y*1*V* = *AX*1 : *AY*1,  то есть  *AX*1 = *FY*2.  Теперь утверждение задачи вытекает из равенств   .



1. В остроугольном треугольнике *ABC*  *O* – центр описанной окружности, *A*1, *B*1, *C*1 – основания высот. На прямых *OA*1, *OB*1, *OC*1нашли такие точки *A', B', C'* соответственно, что четырёхугольники *AOBC', BOCA', COAB'* вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников *AA*1*A', BB*1*B', CC*1*C'*, имеют общую точку.

**Решение**

Пусть *H* – ортоцентр треугольника *ABC*. Тогда  *AH·HA*1 = *BH·HB*1 = *CH·CH*1 , то есть степени *H* относительно описанных окружностей треугольников *AA*1*A', BB*1*B', CC*1*C'* равны, причём точка *H* лежит внутри этих окружностей. С другой стороны,  ∠*BC'O* = ∠*BAO* = ∠*OBC*1,  то есть треугольники *OC'B* и *OBC*1 подобны и  *OC*1·*OC' = OB*2  (см. рис.). Следовательно, степени точки *O* относительно всех трёх окружностей также равны. Из условия ясно, что треугольник *ABC* – не равносторонний, поэтому точки *O* и *H* не совпадают. Поэтому прямая *OH* – общая радикальная ось этих трёх окружностей и, значит, содержит их общую хорду. Таким образом, эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих на прямой *OH*.

1. Выпуклый *n*-угольник *P*, где  *n* > 3,  разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения *n*, если *n*-угольник описанный?

**Решение**

  **Лемма**. Пусть выпуклый *n*-угольник разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Тогда у каждого из треугольников разбиения хотя бы одна сторона является стороной (а не диагональю) *n*-угольника.
 **Доказательство**. Пусть треугольник разбиения имеет углы  α ≤ β ≤ γ  с вершинами *A, B, C* соответственно, причём *AC* и *BC* – диагонали *n*-угольника. К вершине *C* примыкают ещё хотя бы два угла треугольников разбиения. Если хотя бы один из них больше α, то сумма углов при вершине *C* не меньше
γ + β + α = π > ∠*C*.  Противоречие. Значит, все углы при вершине *C*, кроме ∠*ACB*, равны α, причём α < β.
  Рассмотрим второй треугольник разбиения, примыкающий к *BC*. Так как он равен треугольнику *ABC*, то против стороны *BC* в нём лежит угол, равный α. Но угол при вершине *C* в этом треугольнике также равен α. Противоречие.

  Так как сумма углов многоугольника *P* равна  π(*n* – 2)  и они складываются из всех углов треугольников разбиения, то количество этих треугольников равно  *n* – 2.  По лемме в каждом из этих треугольников хотя бы одна сторона является стороной *P*. Отсюда вытекает, что у двух треугольников разбиения по две стороны являются сторонами *P*.
  Пусть *KLM* – один из этих треугольников, причём *KL* и *LM* – стороны *P*. К стороне *KM* примыкает другой треугольник разбиения *KMN*. Одна из его сторон (для определённости *KN*) является стороной *P*. Так как треугольники разбиения равны, то угол *NKM* равен либо углу *LKM*, либо углу *KML*. В первом случае *KM* – биссектриса угла описанного многоугольника *P* и потому содержит центр *I* вписанной окружности. Во втором случае  *KN || LM*.  Тогда *I* лежит на общем перпендикуляре к этим отрезкам и потому содержится (по выпуклости) в параллелограмме *KLMN*, а значит – хотя бы в одном из треугольников *KLM, KMN*.
  Пусть *K'L'M'* – другой треугольник разбиения, две стороны которого являются сторонами *P*. Аналогично предыдущему, *I* содержится либо в этом, либо в смежном с ним треугольнике разбиения. Если *I* содержится хотя бы одном из треугольников *KLM, K'L'M'*, то они имеют общую сторону, и тогда  *n* = 4.  В противном случае треугольник *KMN* – смежный с обоими этими треугольниками и содержит *I*. При этом сторона *MN* – общая с треугольником *K'L'M'*; можно положить  *M = M',  N = K'*.  Рассуждая как выше, получаем, что  *LM, KN, L'M* параллельны друг другу. Но тогда соседние стороны *LM* и *ML'* лежат на одной прямой. Противоречие.

**Ответ**

*n* = 4.

1. Дан треугольник *ABC* и прямая *l*, пересекающая *BC, CA* и *AB* в точках *A*1, *B*1 и *C*1 соответственно. Точка *A'* – середина отрезка, соединяющего проекции *A*1 на *AB* и *AC*. Аналогично определяются точки *B'* и *C'*.
 а)Докажите, что *A', B'* и *C'* лежат на некоторой прямой *l'*.
 б) Докажите, что, если *l* проходит через центр описанной окружности треугольника *ABC*, то *l'* проходит через центр его окружности девяти точек.

**Решение**

  а) Пусть *Pa, Pb, Pc* – середины высот *AHa, BHb, CHc*. Очевидно, что точки *A', B', C'* лежат на сторонах треугольника *PaPbPc* и делят их в тех же отношениях, в каких точки *A*1, *B*1, *C*1 делят стороны треугольника *ABC*. Осталось воспользоваться *теоремой Менелая*.

  б) Если *l* проходит через центр *O* описанной окружности, то (как видно из вышеизложенного) *l'* проходит через точку *O'*, в которую перейдет *O* при аффинном преобразовании, переводящем треугольник *ABC* в треугольник *PaPbPc*. Поэтому достаточно проверить наше утверждение для каких-то двух прямых, проходящих через *O*. Например, для прямых, проходящих через какую-нибудь вершину треугольника.
  Пусть *C*1 – точка пересечения *CO* и *AB,  X, Y* – проекции *C*1 на *AC* и *BC*; *A*0, *B*0, *C*0 – середины *BC, CA, AB,  U, V* – середины *XY* и *A*0*B*0,  *Q* – точка пересечения серединного перпендикуляра к *A*0*B*0 с *UPc* (см. рис.). Так как  *XY || AB*,  точки *V, U* лежат на медиане *СС*0. Значит,  *VQ* : *CPc = UV* : *UC = C*1*O* : *CC*1,  откуда
*VQ* = ½ *OC*0  и *Q* – центр описанной окружности треугольника *A*0*B*0*C*0, то есть окружности девяти точек.



1. На стороне *AB* треугольника *ABC* взята точка *D*. В угол *ADC* вписана окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника *ACD*, а в угол *BDC* – окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника *BCD*. Оказалось, что эти окружности касаются отрезка *CD* в одной и той же точке *X*. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из *X* на *AB*, проходит через центр вписанной окружности треугольника *ABC*.

**Решение**

  **Лемма**. Пусть окружность касается сторон *AC, BC* треугольника *ABC* в точках *U, V*, а описанной около него окружности изнутри в точке *T*. Тогда прямая *UV* проходит через центр *I*вписанной в треугольник *ABC* окружности.
  **Доказательство**. Пусть прямые *TU, TV* вторично пересекают описанную окружность в точках *X, Y*. Тогда *X, Y* – середины дуг *AC, BC*, то есть прямые *AY* и *BX* пересекаются в точке *I* (рис. слева). Поэтому утверждение леммы следует из *теоремы Паскаля*, примененной к ломаной *AYTXBC*.

