**Возможные варианты решения задач городской олимпиады по геометрии**

**8 класс**

1. В треугольнике ABC со сторонами  AB = 4,  AC = 6  проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH.
Найдите MH, где M – середина BC.

Решение

Пусть D – точка пересечения прямых BH и AC (см. рис.). Тогда в треугольнике ABD  AH – биссектриса и высота, а значит, и медиана. Следовательно, MH – средняя линия треугольника BCD и  MH = ½ CD = ½ (AC – AB) = 1.



2. В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

Решение

Пусть AD, BC – основания трапеции. Проведём через вершину C прямую, параллельную диагонали BD. Пусть E – точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда треугольник ACE – прямоугольный и, значит, его медиана, проведённая из вершины C, равна половине гипотенузы, то есть средней линии трапеции. Из условия следует, что высота этого треугольника совпадает с медианой, поэтому диагонали трапеции равны.

3. В треугольнике ABC  ∠A = 60°.  Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B1. Докажите, что прямая B1C1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение

Пусть B0, C0 – середины сторон AC, AB соответственно. Так как треугольники AB0B1, AC0C1 – прямоугольные с  ∠A = 60°,  то  AB1 = 2AB0 = AC  и
AC1 = 2AC0 = AB.  Следовательно, прямая B1C1 симметрична BC относительно биссектрисы угла A. Поскольку эта биссектриса проходит через центр вписанной окружности, а прямая BC касается этой окружности, то и прямая B1C1 её касается.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике A'B'C' эти прямые также являются биссектрисами.
Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

Решение

  Из условия следует, что в четырёхугольнике A'C'B'C диагональ CC' является биссектрисой углов C и C', а, значит, осью симметрии. Поэтому  A'C = B'C,
A'C' = B'C',  ∠CB'A' = ∠CA'B'  и  ∠AB'C' = ∠BA'C'.  Аналогично,  ∠BC'A' = ∠BA'C' = ∠AB'C' = ∠AC'B'.  Следовательно, треугольники  AB'C' и BA'C' равны, то есть  AB' = BA'  и  AC = BC. Равенство  AB = BC  доказывается аналогично.

Ответ

Верно.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB1 и CC1. A0 – середина стороны BC. Прямые A0B1 и A0C1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника PA0Q лежит на высоте треугольника ABC.

Решение

  Так как треугольники BCB1 и BCC1 – прямоугольные, то их медианы B1A0, C1A0 равны половине гипотенузы, то есть  B1A0 = A0C = A0B = C1A0.
  ∠PB1A = ∠CB1A0 = ∠B1CA0 = ∠PAC,  и, значит,  PA = PB1 (рис. слева). Аналогично,  QA = QC1.  Следовательно, вписанная окружность треугольника A0PQ касается его сторон в точках A, B1, C1, откуда и следует утверждение задачи.



6. Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

Решение

  Сначала разделим сторону пополам. Проведя диагонали, найдем центр O квадрата ABCD. Теперь пусть X – точка на стороне BC, Y – точка пересечения XO и AD, U – точка пересечения AX и BY, V – точка пересечения прямых UC и XY (рис. слева). Тогда прямая BV делит основания трапеции CYUX пополам. Соединив O с серединой CY, разделим пополам стороны AB и CD.



Покажем, что если две противоположные стороны разделены на k равных частей, то их можно разделить на  k + 1  равных частей. Пусть
AX1 = X1X2 = ... = Xk–1B,  DY1 = Y1Y2 = ... = Yk–1C.  Тогда по теореме Фалеса прямые  AY1, X1Y2, ..., Xk–1C  делят диагональ BD на  k + 1  равных частей (рис. справа). Аналогично разделив вторую диагональ и проведя через соответствующие точки прямые, параллельные BC, разделим на  k + 1  равных частей сторону AB.