Городская олимпиада по геометрии 2015-2016 учебный год

**11 класс**

1. Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведённой к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведённой к этой же стороне. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.
2. Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?
3. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника    ,   где l1, l2 – наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S – его площадь.
4. В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая l пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω в точках B и C, окружность Ω в точках D и E (порядок точек на прямой – A, B, C, D, E, F). Пусть  BC = DE.  Докажите, что  AB = EF.
5. В остроугольном треугольнике ABC  O – центр описанной окружности, A1, B1, C1 – основания высот. На прямых OA1, OB1, OC1 нашли такие точки A', B', C' соответственно, что четырёхугольники AOBC', BOCA', COAB' вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA1A', BB1B', CC1C', имеют общую точку.
6. Выпуклый n-угольник P, где  n > 3,  разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него.
Каковы возможные значения n, если n-угольник описанный?
7. Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A1, B1 и C1 соответственно. Точка A' – середина отрезка, соединяющего проекции A1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.
 а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.
 б) Докажите, что, если l проходит через центр описанной окружности треугольника ABC, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.
8. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В угол ADC вписана окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника ACD, а в угол BDC – окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника BCD. Оказалось, что эти окружности касаются отрезка CD в одной и той же точке X. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из X на AB, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.