Городская олимпиада по геометрии 2015-2016 учебный год

**9 класс**

1. Высоты AA1 и BB1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через точки A1 и B1, в точке D. Отрезки AD и BB1пересекаются в точке M, BD и AA1 – в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B1DM и A1DN касаются.
2. Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?
3. В треугольнике ABC проведён серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник A'B'C' будет равносторонним?
4. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, положил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провёл диагональ, опустил на неё перпендикуляры из двух оставшихся вершин, разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону, так что вместе с нижним прямоугольником они образовали прямоугольник. Как по полученному прямоугольнику восстановить исходный с помощью циркуля и линейки?
5. В треугольнике ABC  ∠B = 2∠C.  Точки P и Q на серединном перпендикуляре к стороне CB таковы, что  ∠CAP = ∠PAQ = ∠QAB = 1/3 ∠A.   
   Докажите, что Q – центр описанной окружности треугольника CPB.
6. а) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

1. Дан треугольник АВС и прямая 1. Прямые, симметричные 1 относительно АВ и АС пересекаются в точке A1. Точки B1, C1 определяются аналогично. Докажите, что:

 а) прямые AA1, BB1, CC1 пересекаются в одной точке;  
 б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;  
 в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

1. Четырёхугольник ABCD описан около окружности с центром I. Точки M и N – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что четырёхугольник ABCD – вписанный тогда и только тогда, когда  IM : AC = IN : BD.