9 класс

1. Найти все числа ,  и , которые удовлетворяют равенству .

Решение.

Преобразуем равенство: ;

;

;

;

. Отсюда получаем решение: .

1. Вписанная окружность треугольника ABC (AB > BC) касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно, RS - средняя линия, параллельная AB, T - точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника.

Решение.

Будем считать, что R лежит на AC, S - на BC. Тогда

RQ=RC-QC = (b/2) - ((a+b-c)/2) = ((c-a)/2). Поскольку треугольники AQP и RQT подобны, а треугольник AQP равнобедренный, то RQ=RT. Следовательно, ST = RS-RT = RS-RQ= (c/2) - ((c-a)/2) = (a/2) = BS. Отсюда треугольник TSB равнобедренный и /SBT =/STB=/ TBA, а BT - биссектриса угла B треугольника ABC.

1. Вы прибыли на остров, где живут только два племени: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда лгут. Навстречу Вам вышли 3 аборигена и сделали по два заявления.

Первый сказал: «На острове живет не более трех человек».

«Все жители острова - лжецы».

Второй сказал: «На острове живет не более 4 человек».

«Не все жители острова - лжецы».

Третий сказал: «На острове живет 5 человек».

«На острове не менее 3 лжецов».

Сколько человек живет на острове и сколько среди них лжецов?

Решение.

Предположим, что первый житель – рыцарь. Значит, он всегда говорит правду, следовательно, все жители острова – лжецы, т. е. он сам – тоже лжец. Противоречие. Следовательно, первый житель – лжец. Из сделанных им заявлений ясно, что на острове живет больше 3 человек и среди них есть рыцари.

Т.к. на острове точно есть рыцари, то второе утверждение второго жителя – правда, а, значит, второй житель – рыцарь, и на острове живет ровно 4 человека. Получаем, что третий житель – лжец, значит, на острове меньше трех лжецов. Но т.к. уже известно, что первый и третий жители – лжецы, то лжецов ровно два.

1. Сколько раз входит двойка в разложение на простые множители произведения ?

Решение.

Преобразуем произведение:



.

Таким образом, двойка в разложение на простые множители входит  раз.

Ответ:  раз.

1. Даны положительные числа , , …, . Известно, что . Докажите, что .

Решение.

Способ 1.

Раскрыв в левой части скобки, получим сумму:

.

Сумма чисел во второй скобке не превосходит ,  сумма в третьей скобке не превосходит ,  и так далее. Значит, все произведение не превосходит

.

Способ 2.

Методом математической индукции докажем, что для всех натуральных n верно неравенство:

.

При  имеем: .

Пусть при  имеет место: .

Рассмотрим случай : 

.

В силу принципа математической индукции неравенство доказано.