**10 класс**

№1. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

Решение:

Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как она вписана, имеем 6 мест для буквы «ц», и наконец, 7 мест для буквы «т». Всего $5∙6∙7=210$ способов.

Ответ: 210 способов

№2. Найти наименьшее значение произведения *ху*, где *х* и *у* удовлетворяют системе$\left\{\begin{array}{c}x+y=3a-1,\\x^{2}+y^{2}=4a^{2}-2a+2.\end{array}\right.$

Решение:

Заметим, что 2*ху* = (*х* + *у*)2 - *х*2 - *у*2. Возведем обе части первого уравнения в квадрат и почленно вычтем из них обе части второго уравнения второго уравнения: $2xy=9a^{2}-6a+1-$($4a^{2}-2a+2)$ = $5a^{2}-4a-1$ $⇔xy=\frac{1}{2}(5a^{2}-4a-1)$.

Для того чтобы найти наименьшее значение, которое может принимать произведение *xy*, надо найти минимум квадратичной функции
$f\left(a\right)=\frac{1}{2}(5a^{2}-4a-1)$. График функции $f\left(a\right)$ - парабола, ветви которой направлены вверх. Минимальное значение функция принимает в точке
*а*0 = 0,4, которая является абсциссой вершины параболы. Значение функции в этой точке $f\left(0,4\right)= -0,9$. Таким образом, минимальное значение, которое может принимать произведение *ху* – это значение -0,9. Осталось убедиться, что при *а* = 0,4 исходная система имеет решение.

При *а* = 0,4 система примет вид $\left\{\begin{array}{c}x+y=0,2\\xy=-0,9\end{array}\right..$ Решая систему подстановкой, приходим к уравнению 10у2-2у-9 = 0. Вычислим дискриминант:$\frac{D}{4}=1+90=91>0$. Из положительности дискриминанта заключаем, что решение системы существует; следовательно, минимальное значение произведения
*ху* = -0,9.

Ответ: -0,9

№3. Окружность, вписанная в треугольник *АВС*, делит основание *АС* точкой касания *D* на отрезки *а* и *b* (рис.1). Найдите площадь треугольника *АВС*, если известно, что $∠В=60°$.



 рис 1.

Решение:

Проведем, как обычно, радиусы *OD*, *OE*,*OF* в точки касания окружности со сторонами треугольника *АВС*. Заметим, что *AF* = *AD* = *a*, *CD* = *CE* = *b*.Кроме того, введем обозначения *OD* = *OE* = *OF* = *r*. Тогда из Δ*ВОЕ*, где *ВО* – биссектриса $∠В$, а значит ∠ОВЕ = 30°, находим: ВЕ = ОЕ$∙$ctg30° = *r*$\sqrt{3}$.

Δ*АВС*: *АС* = *a*+*b*; AB = *a* + *r*$\sqrt{3}$; BC = *b* + *r*$\sqrt{3}$*.*

Площадь треугольника *АВС* можно выразить теперь, по крайней мере, тремя способами: по формуле Герона, по формуле *S* = *pr* и, наконец, по формуле
0,5 *АВ*$∙$*ВС* $∙$*sin*60°. Выберем первые два способа – формулы, в которые входит полупериметр *р*; здесь *р* =  *a* + *b* + *r*$\sqrt{3}$.

По формуле Герона $S=\sqrt{(a + b + r\sqrt{3})abr\sqrt{3}}$. (1)

По формуле *S* = *pr* имеем: $ S$ = (*a* + *b* + *r*$\sqrt{3}$) ∙ *r* (2)

Приравняв полученные выражения (1) и (2) (то есть применив метод площадей), придем к уравнению относительно неизвестной величины *r*.

Преобразуем полученное уравнение: ($a + b + r\sqrt{3})abr\sqrt{3}$ = (*a* + *b* + *r*$\sqrt{3}$)2 *r*2, $ab\sqrt{3}= \left(a + b + r\sqrt{3}\right)$ *r.* Из равенства (2) следует что интересующая нас площадь треугольника АВС равно $ab\sqrt{3}$.

Ответ: *S* = $ab\sqrt{3}$.

№4. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс.руб под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Решение:

Пусть *S* – первоначальная сумма вклада, *х* – искомая сумма ежегодных дополнительных взносов, *р* – годовая процентная ставка, а *k* = $1+\frac{p}{100}$ соответствующий ей коэффициент ежегодного роста, *n* – срок хранения, *R* – суммарный процентный прирост вклада за все *n* лет хранения. В соответствии с условиями задачи сумма вклада составит через год *Sk*, через два года - (*Sk* + *х*) *k* = *Sk2*+*хk*, через три года – (*Sk2*+*хk*+*х*) *k* = *Sk3*+*хk2* + *хk*, а через *n* лет - *Skn*+*хkn-1*+ *хkn-2* +……..+ *хk* = *Skn* + *хk*$∙\frac{k^{n-1}-1}{k-1}$.

Таким образом, приходим к линейному уравнению для неизвестной величины *х*: *Skn* + *хk*$∙\frac{k^{n-1}-1}{k-1}$ = *S*$∙$(1+$\frac{R}{100}$).

Подставляя в него заданные значения *S* = 3900; *k* = 3/2; *n* = 5; *R* = 725 находим *х*. *х* = 210.

Ответ: 210 тыс. руб.

№5. Докажите, что уравнение *у*2 = 5*х*2+6 не имеет решений в целых числах.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $y^{2}-x^{2}=4x^{2}+6 ⇔ \left(y-x\right)\left(y+x\right)=4x^{2}+6$. Так как правая часть уравнения является четным числом, то и левая часть также должна быть четным числом. Если $\left(y+x\right)$ четно, то $\left(y-x\right)$ тоже четно, и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится. Значит, уравнение не имеет решений.

***Оценивание***

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.