**11 класс**

№1. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

Решение:

Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как она вписана, имеем 6 мест для буквы «ц», и наконец, 7 мест для буквы «т». Всего способов.

Ответ: 210 способов

№2. Решите уравнение *х*2 + 3 = 7*у* в целых числах.

Решение:

Остаток от деления на 7

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| х2 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| х2+3 | 3 | 4 | 0 | 5 | 5 | 0 | 4 |

Так как 7*у* = *х*2 + 3 делится на 7, то или *х* = 7*а* + 2 или *х* = 7*а* + 5, где *а.*

При *х* = 7*а* + 2: 7*у* = 49*а*2 + 28*а* + 4 + 3

*у* = 7*а*2 + 4*а* + 1

При *х* = 7*а* + 5: 7*у* = 49*а*2 + 70*а* + 25 + 3

*у* = 7*а*2 + 10*а* + 4

Ответ: (7*а* + 2; 7*а*2 + 4*а* + 1); (7*а* + 5; 7*а*2 + 10*а* + 4), *а.*

№3. Функция *f(x)* определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4, и на промежутке ее значения вычисляются по правилу *f(x)*=1-. Решите уравнение

Решение:

Так как функция *f(x)* периодична с периодом 4, то достаточно рассмотреть ее на любом отрезке длины 4. Так как она является и не четной, то удобно рассмотреть отрезок [-2; 2].

На отрезке [0; 2] по условию функция имеет вид *f(x)*=1-. Используя определение нечетной функции, продолжим *f(x)* на отрезок [-2;0]. Здесь она будет вычисляться по правилу *f(x)* = *-* *f(-x) = -*(1 *-* *)* = *-* 1 + .

Итак, на отрезке [-2;2] функция имеет вид

По условию задачи функция *f(x)* периодична с периодом 4, поэтому  
.

Уравнение упрощается:

Рассмотрим два случая.

*1-й случай:* Пусть *x* [0; 2]; тогда

*2-й случай:* Пусть *x* [-2; 0]; тогда

С учетом периодичности получаем ответ: .

Ответ:.

№4. Постройте график функции .

Решение:

Функция является периодической, с основным периодом 2. Это значит, что для начала можно ограничиться построением графика функции на любом промежутке длины 2. Выберем отрезок [-]. Далее заметим, что функция является нечетной. Поскольку функция является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат, в частности на отрезке [-]. Поэтому, построив график функции на отрезке [0], мы с помощью симметрии сможем построить и график функции на отрезке [-].

Рассмотрим функцию на отрезке [0]. По определению арксинуса эта запись означает где . Рассуждения проведем по отдельности в двух частях: .

1) Если , то, поскольку , из равенства следует равенство - в силу монотонности функции на отрезке .

2) Если , то воспользуемся тем, что . Значит, .

Если , . Но тогда из равенства следует равенство .

Функция , тождественна кусочной функции . График этой функции изображен на рис.1.

На рисунке 2 представлен график функции , . На рисунке 3 представлен весь график функции .

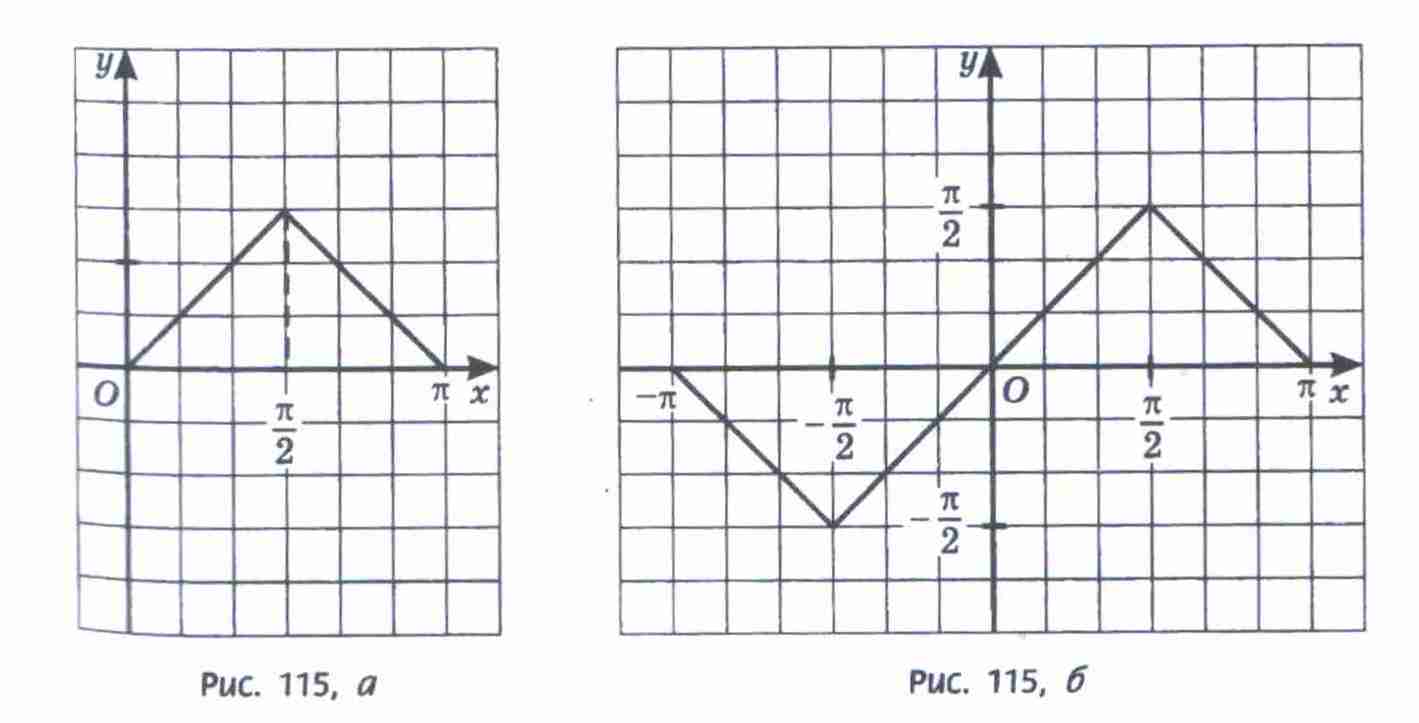
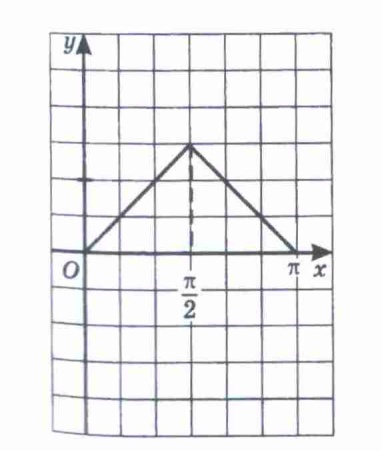


рис.1 рис. 2

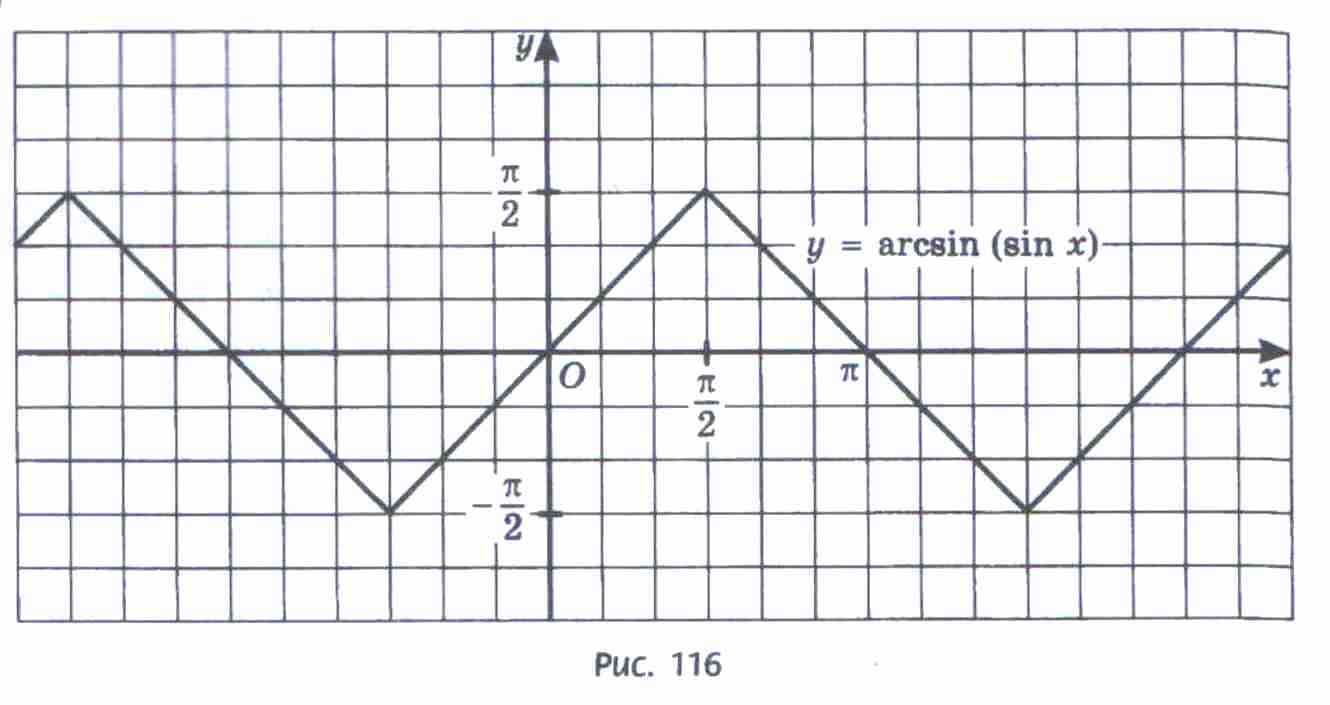
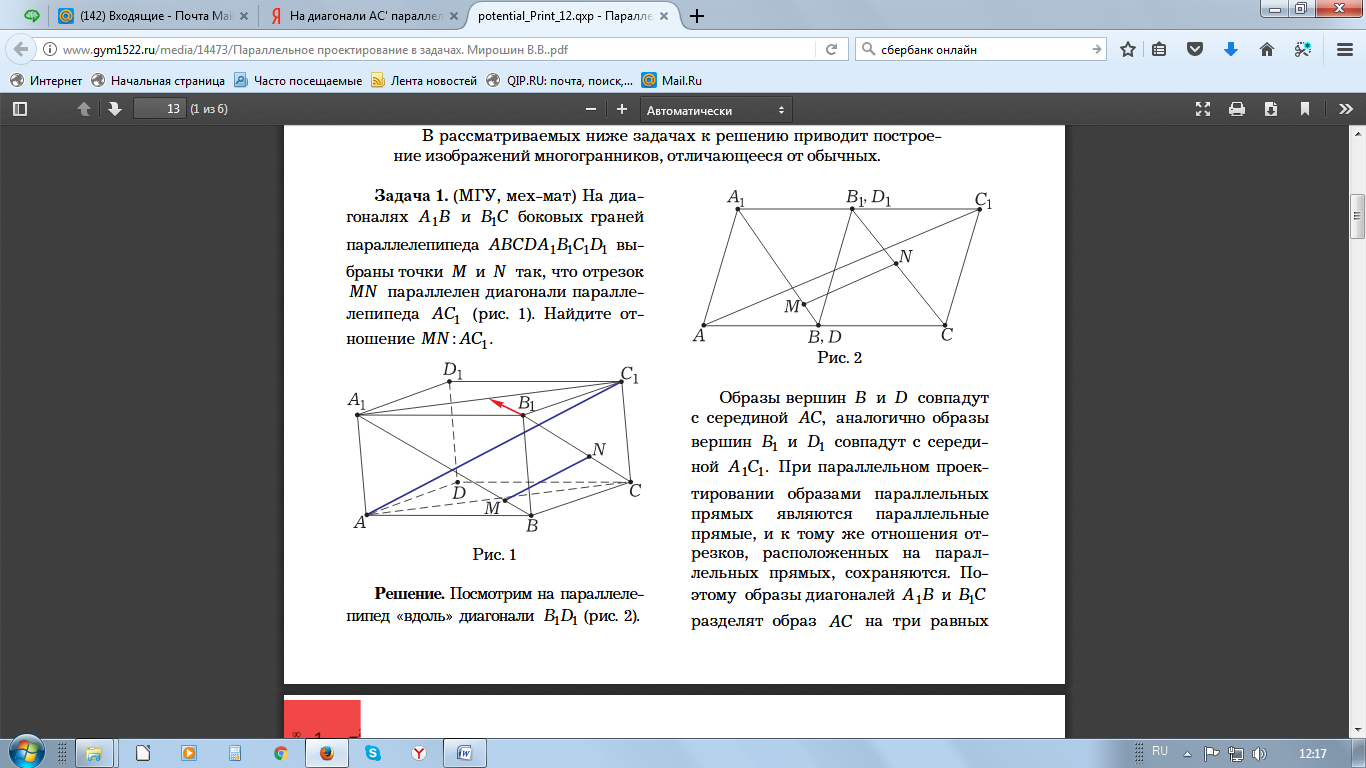
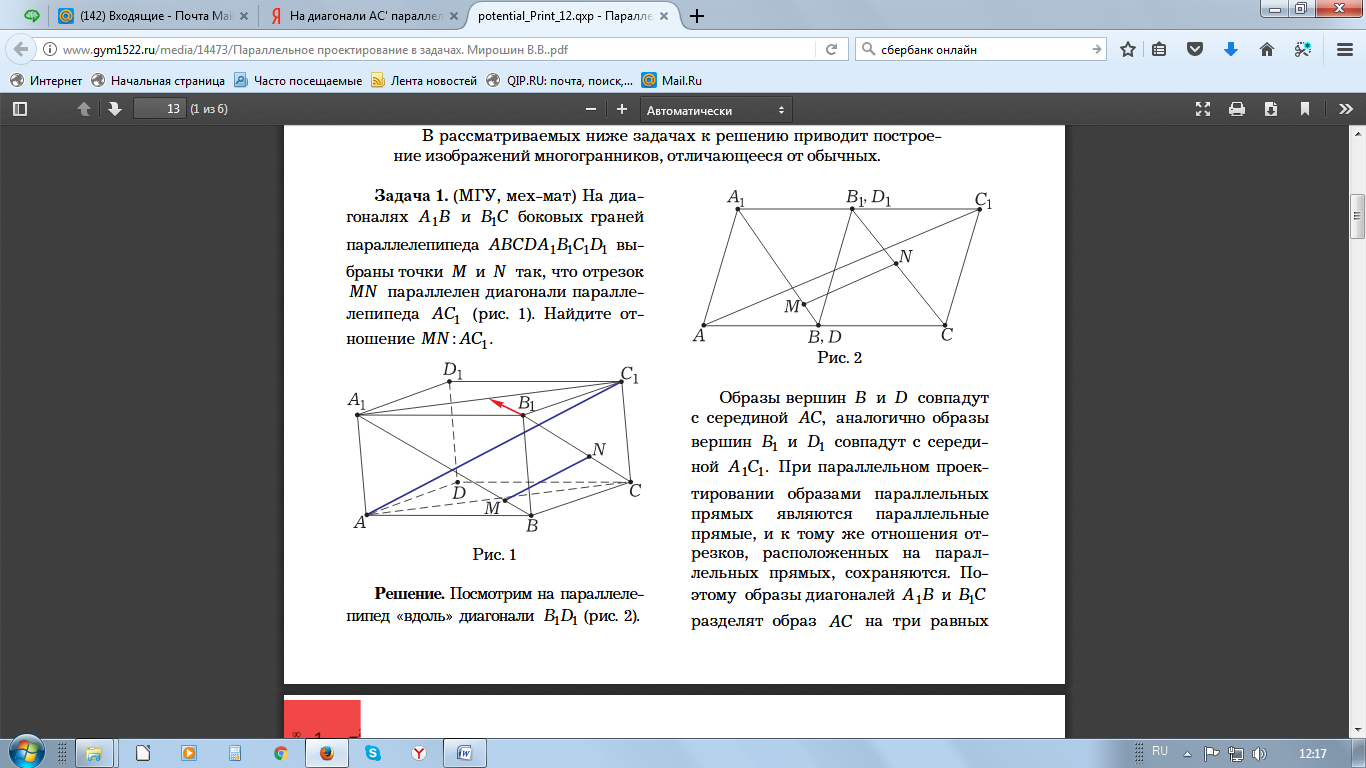


рис. 3.

№5. На диагоналях *А1В* и *В1С* боковых граней параллелепипеда *ABCDA1B1C1D*1 выбраны точки *M* и *N*, так что отрезок *MN* параллелен диагонали параллелепипеда *АС*1. Найдите отношение длин этих отрезков.

Решение:

Посмотрим на параллелепипед «вдоль» диагонали *B1D1*(рис. 4).

Образы вершин *В* и *D* совпадут с серединой *АС*, аналогично образы вершин *B1* и *D1* совпадут с серединой *A1C1*. При параллельном проектировании образами параллельных прямых являются параллельные прямые, и к тому же   
 рис. 4 отношения отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняются. Поэтому образы диагоналей *А1В* и *В1С* разделят образ *AC* на три равных отрезка, средний из которых будет равен образу *MN*. Поэтому *MN*: *А1С* = 1:3.

Ответ: *MN*: *А1С* = 1:3.

***Оценивание***

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо нерассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.