**10 класс**

№1. Найдите наибольшее значение параметра *р*, при котором функция $f\left(x\right)=x^{2}+3px+2p^{2}-1$ принимает отрицательные значения в интервале (0;1).

Решение: По условию задачи составляем систему

$$\left\{\begin{array}{c}D=9p^{2}-4(2p^{2}-1)>0,\\f\left(0\right)=2p^{2}-1\leq 0,\\f\left(1\right)=1+3p+2p^{2}-1\leq 0;\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}p\in R,\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq p\leq \frac{1}{\sqrt{2}},\\-\frac{3}{2}\leq p\leq 0;\end{array}⇔p\right.\right.\in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right].$$

Ответ: наибольшее значение *р* равно 0.

№2. Вычислите сумму 7+77+777+7777+……..+77…..7

 *n*

Решение: Обозначим искомую сумму *S*:

*S*= 7+77+777+7777+……..+77…..7 = 7(1+11+111+1111+……+11…..1) =

 *n n*

$\frac{7}{9}∙(9+99+999+9999+…+99…9$) =

 *n*

$$\frac{7}{9}\left(\begin{array}{c}\left(10-1\right)+ \left(10^{2}-1\right)+\\ \left(10^{3}-1\right)+ \left(10^{4}-1\right)+ …+\left(10^{n}-1\right)\end{array}\right)= \frac{7}{9}\left(10+10^{2}+10^{3}+10^{4}+…+10^{n}-n\right)= \frac{7}{9}\left(\frac{10(10^{n}-1)}{9}-n\right)=\frac{70\left(10^{n}-1\right)-63n}{81}$$

Ответ: $\frac{70\left(10^{n}-1\right)-63n}{81}.$

№3. При каких натуральных $n$ число $n$4 +4 простое?

Решение: Так как

$n^{4}+4= n^{4}+4n^{2}-4n^{2}+4= (n^{2}+2)^{2}-4n^{2}=\left(n^{2}+2n+2\right)(n^{2}-2n+2)$, то $n$4 +4 – простое число, только при $n^{2}+2n+2=1$ или
$n^{2}-2n+2=1$. Первое уравнение решений в натуральных чисел решений не имеет. Решением второго уравнения является $n=1$, в этом случае выражение $n$4 +4 = 5, то есть является простым числом.

Ответ:$ n=1$.

№4. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Решение: Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т.е. существуют 3 способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято. И т.д. Используя принцип умножения, получаем произведение: 3 = 36! = 3P6.

Ответ: 3P6 = 36!.

№5. Вычислите без таблиц и калькулятора $\cos(36^{°})$.

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник *АВС* с углом при вершине $36^{°}$ и боковыми сторонами *АВ* и *ВС*, равными 1 (рис 1). В этом треугольнике углы при основании равны 72°.

Проведем биссектрису *АD* этого треугольника. $∠DAC=36°$, равнобедренные треугольники *АВС* и *САD*, имеющие равные углы при вершине, подобны по двум сторонам и углу между ними.

Так как $∠DAB=∠B$, то треугольник $ADB$ тоже равнобедренный и *АС* = *АD* = *DВ*.

Рис.1

Проведем высоту *DЕ* равнобедренного треугольника$ ADB$, *АЕ* = *ВЕ* = 0,5, поэтому искомый $\cos(36^{°})$= 0,5:*х* = $\frac{1}{2x}$. Пусть *АС* = *х*.

Из подобия треугольников *АВС* и *САD* следует справедливость равенства $\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$, с помощью которого составим пропорцию для нахождения *х*: $\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}$. Это уравнение имеет единственный положительный корень $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, поэтому $\cos(36^{°}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4})$.

Ответ: $\cos(36^{°}=\frac{\sqrt{5}+1}{4})$.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Баллы*** | ***Правильность (ошибочность) решения*** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. Решение отсутствует. |

Помимо этого, следует обратить внимание жюри муниципального этапа на то, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.